## Algjebra e Bullit

Matematikani anglez i shekullit XIX Xhorxh Bull formuloi algjebrën e tij e cila paraqet një sistem për analizë matematikore të qarqeve logjike dhe të veprimeve logjike.

Algjebra e Bullit ka të bëjë me variabla binare dhe operacione logjike.

Variablat binare shënohen me shkronja të alfabetit latin si: **A, B, C, ..., N** etj. dhe marrin vlera vetëm nga bashkësia dyelementësh **{0, 1}.**

Operacionet themelore logjike janë: **OSE**, **DHE** dhe **JO**, të cilat paraqesin mbledhjen logjike, shumëzimin logjik dhe komplimentimin. Këto operacione dallohen prej operacioneve analoge të algjebrës klasike p.sh. shuma logjike **“A+B”** nuk interpretohet si “**A plus B**” por si “**A OSE B**”.

Përveç tri operacioneve bazë në grupin e operacioneve themelore logjike hyjnë edhe tri operacione tjera logjike (të cilat paraqesin kombinime të thjeshta të operacioneve bazë)

* Operacioni **JOOSE**,
* Operacioni **JODHE** dhe
* Operacioni **OSE EKSKLUZIVE**.

Tabela e gjendjeve na mundëson përcaktimin e vlerave të funksionit për **2n** kombinimet e mundshme të n variablave.

### Operacioni logjik “OSE” – realizohet përmes qarkut logjik “OSE” me dy apo më tepër hyrje dhe një dalje. Dalja e qarkut “OSE” është gjendjen “1” nëse cila do prej hyrjeve është në gjendjen “1”.

Simboli standard, funksioni dhe tabela e gjendjeve për qarkun logjik **“OSE”** duken:



**Operacioni logjik “DHE”** – realizohet përmes qarkut logjik “DHE” me dy apo më tepër hyrje dhe një dalje. Dalja e qarkut “DHE” është gjendjen “1” atëherë dhe vetë, atëherë kur të gjitha hyrjet janë në gjendjen “1”.

Simboli standard, funksioni dhe tabela e gjendjeve për qarkun logjik **“DHE”** janë:

**Operacioni logjik “JO”** - realizohet përmes qarkut logjik “**JO**” me një hyrje dhe një dalje. Dalja e qarkut “**JO**” është gjendjen “**1**” atëherë dhe vetëm atëherë kur hyrja është në gjendjen “**0**”.

Simboli standard, funksioni dhe tabela e gjendjeve për qarkun logjik **“JO”** duken:

**Operacioni logjik “JOOSE”**

Qarku “**JOOSE**” realizohet me lidhjen e invertorit **“JO”** në dalje të qarkut **“OSE”.**

Dalja e qarkut “**JOOSE**” është në gjendjen “**1**” nëse të gjitha hyrjet janë në gjendjen “**0**”.

Simboli standard, funksioni dhe tabela e gjendjeve për qarkun logjik **“JOOSE”** janë:

****

**Operacioni logjik “JODHE”**

Qarku “**JODHE**” realizohet me lidhjen e invertorit “**JO**” në dalje të qarkut “**DHE**”.

Dalja e qarkut “**JODHE**” është në gjendjen “**1**” për të gjitha kombinimet hyrëse përveç rastit kur të gjitha hyrjet janë në gjendjen “**1**”.

Simboli standard, funksioni dhe tabela e gjendjeve për qarkun logjik **“JODHE”** duken:

****

**Operacioni logjik “OSE EKSKLUZIVE”**

Dalja e qarkut logjik “**OSE EKSKLUZIVE**” me dy hyrje dhe një dalje është në gjendjen “**1**” nëse vetëm njëra prej hyrjeve është në gjendjen “**1**”.

Simboli standard, funksioni dhe tabela e gjendjeve për qarkun logjik **“OSE EKSKLUZIVE”** janë:

****

**Operacioni logjik “JOOSE EKSKLUZIVE”**

Dalja e qarkut logjik “JO**OSE EKSKLUZIVE**” me dy hyrje dhe një dalje është në gjendjen “**1**” nëse të dy hyrjet janë në gjendje të njëjtë “**0**” ose “**1**”.

Simboli standard, funksioni dhe tabela e gjendjeve për qarkun logjik **“OSE EKSKLUZIVE”** janë:

## Aksiomat dhe rregullat themelore të Algjebrës së Bullit

Aksiomat themelore të Algjebrës së Bullit janë:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | + | 0 | = | 0 |  |  | 0 | \* | 0 | = | 0 |  |  | $$\overline{0}$$ | = | 1 |
| 0 | + | 1 | = | 1 |  |  | 0 | \* | 1 | = | 0 |  |  | $$\overline{1}$$ | = | 0 |
| 1 | + | 0 | = | 1 |  |  | 1 | \* | 0 | = | 0 |  |  |  |  |  |
| 1 | + | 1 | = | 1 |  |  | 1 | \* | 1 | = | 1 |  |  |  |  |  |

Rregullat themelore të Algjebrës së Bullit janë:

1. Rregulla e mbledhjes dhe shumëzimit me “1” dhe “0”

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| A | + | 0 | = | A |  |  | A | \* | 0 | = | 0 |
| A | + | 1 | = | 1 |  |  | A | \* | 1 | = | A |

1. Rregulla e mbledhjes dhe shumëzimit me vetveten

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| A | + | A | = | A |
| A | \* | A | = | A |

1. Rregulla e mbledhjes dhe shumëzimit me komplimentin

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| A | + | $$\overline{A}$$ | = | 1 |
| A | \* | $$\overline{A}$$ | = | 0 |

1. Rregulla e negacionit të dyfishtë $\overline{\overline{A}}$ = A

## Ligjet dhe teoremat e Algjebrës së Bullit

Ligjet e Algjebrës së Bullit janë:

1. Ligji komutativ i mbledhjes dhe shumëzimit

A + B = B + A A \* B = B \* A

1. Ligji asociativ i mbledhjes dhe shumëzimit

(A + B) + C = A + (B + C) (A \* B) \* C = A \* (B \* C)

1. Ligji distributiv A\*(B+C)=A\*B+A\*C
2. A+B\*C=(A+B)(A+C)

Shprehja 4 nuk vlen në algjebrën klasike, por është shumë e përdorshme gjatë përpunimit të shprehjeve në algjebrën e Bullit.

Për transformime të shumta të funksioneve logjike përdoren dy teorema të algjebrës së Bullit të njohura me emrin teoremat e **De Morganit**.

1. $\overbar{A+B}=\overbar{A}\*\overbar{B}$
2. $\overbar{A\*B}=\overbar{A}+\overbar{B}$

Duke i zbatuar teoremat e De Morganit shohim se simbolet standarde të qarqeve logjike JOOSE dhe JODHE mund të paraqiten në forma tjera.

## Ndërtimi i rrjetit logjik

Çdo funksion logjik mund të paraqitet përmes qarqeve logjike themelore, mirëpo kjo shpesh rezulton në shkallë të ndryshme të ndërlikueshmërisë. Algjebra e Bullit si mjet matematikor mundëson që funksioni logjik të thjeshtohet deri në minimum ashtu që skema logjike të ketë numër minimal të komponentëve.

**Shembulli 1.** Të realizohet rrjeti logjik për funksionin e dhënë:

$$Y=\overline{\left(\overline{A}+B\right)\*\overline{B}}$$

**Shembulli 2.** Të ndërtohet skema logjike për funksionin e Bullit

$$Y=\left(A+D\right)\overline{A}B\overline{C}+\left(\overline{C+D}\right)(\overline{\overline{B}+AD})$$

**Shembulli 3.** Të thjeshtohen algjebrikisht funksionet vijuese të Bullit.

1. $Y=AB+A\overline{B}$
2. $Y=(\overline{A+B})(\overline{A}+\overline{B})$
3. $Y=\left(A+B\right)(A+\overline{B})$
4. $Y=A+\overline{A}B+\overbar{A}\overbar{B}$
5. $Y=AC+AB\overline{C}$

**Shembulli 4.** Të tregohet se si mund të realizohet qarku logjik që realizon operacionin

 $Y=\overbar{A}\overbar{B}+AB$ me shfrytëzimin e:

1. vetëm qarqeve logjike JODHE,
2. vetëm qarqeve logjike JOOSE

## Tabelat e Karnos

Një ndër metodat më të thjeshta dhe më efektive për minimizimin (thjeshtimin) e çfarëdo shprehje logjike është metoda e tabelave Karno.

Tabelat Karno për një, dy, tre dhe katër ndryshore duken:



**Shembulli 1.**

Të minimizohet funksioni logjik duke i përdor tabelat Karno

$$f=\overbar{A}\overbar{B}C+\overbar{A}C\overbar{D}+\overbar{B}\overbar{C}D+\overbar{A}\overbar{B}\overbar{C}$$

**Zgjidhje:**

Pasi funksioni përbëhet prej 4 ndryshoreve duhet së pari të zgjerojmë funksionin në produkt të katër ndryshoreve.

$$f=\overbar{A}\overbar{B}C+\overbar{A}C\overbar{D}+\overbar{B}\overbar{C}D+\overbar{A}\overbar{B}\overbar{C}$$

$$f=\overbar{A}\overbar{B}C(D+\overbar{D})+\overbar{A}\left(B+\overbar{B}\right)C\overbar{D}+(A+\overbar{A})\overbar{B}\overbar{C}D+\overbar{A}\overbar{B}\overbar{C}(D+\overbar{D})$$

$$f=\overbar{A}\overbar{B}CD+\overbar{A}\overbar{B}C\overbar{D}+\overbar{A}BC\overbar{D}+\overbar{A}\overbar{B}C\overbar{D}+A\overbar{B}\overbar{C}D+\overbar{A}\overbar{B}\overbar{C}D+\overbar{A}\overbar{B}\overbar{C}D+\overbar{A}\overbar{B}\overbar{C}\overbar{D}$$

$$f=\overbar{A}\overbar{B}CD+\overbar{A}BC\overbar{D}+\overbar{A}\overbar{B}C\overbar{D}+A\overbar{B}\overbar{C}D+\overbar{A}\overbar{B}\overbar{C}D+\overbar{A}\overbar{B}\overbar{C}\overbar{D}$$



Tani formojmë tabelën Karno për këtë funksion

$$f=\overbar{A}\overbar{B}+\overbar{A}C\overbar{D}+\overbar{B}\overbar{C}D$$

$$f=\overbar{A}\overbar{B}C+\overbar{A}C\overbar{D}+\overbar{B}\overbar{C}D+\overbar{A}\overbar{B}\overbar{C}$$

$$f=\overbar{A}\overbar{B}\left(C+\overbar{C}\right)+\overbar{A}C\overbar{D}+\overbar{B}\overbar{C}D$$

$$f=\overbar{A}\overbar{B}+\overbar{A}C\overbar{D}+\overbar{B}\overbar{C}D$$

**Shembulli 2.**

Për funksionin f me tri variabla është dhënë tabela e gjendjeve. Të gjendet shprehja algjebrike për këtë funksion.

**Zgjidhje:**



# PYETJE DHE DETYRA

1. Ç’është algjebra e Bullit?
2. Ku qëndron dallimi i algjebrës së Bullit nga algjebra klasike?
3. Ç’është tabela e gjendjeve?
4. Të përkufizohen operacionet themelore logjike.
5. Të numërohen postulatet themelore të algjebrës së Bullit.
6. Të numërohen rregullat e algjebrës së Bullit.
7. Të numërohen ligjet e algjebrës së Bullit.
8. Të vërtetohen teoremat e De Morganit nëpërmjet të ndërtimit të tabelave të gjendjeve.
9. Të ndërtohet tabela e gjendjeve për funksionin e Bullit 
10. Të minimizohet funksioni i Bullit: , Të ndërtohet tabela përkatëse e gjendjeve dhe të vizatohet skema logjike që i përgjigjet funksionit Y.
11. Të thjeshtohet algjebrikisht funksionet vijuese të Bullit:
	1. 
	2. 
	3. 
	4. 
	5. 
12. Të realizohet operacioni logjik DHE nëpërmjet qarqeve logjike OSE dhe JO.
13. Të realizohet operacioni logjik OSE nëpërmjet qarqeve logjike DHE dhe JO.
14. Të realizohet qarku OSE-EKSKLUZIVE, duke përdorur:
	1. vetëm qarqe logjike JODHE
	2. vetëm qarqe logjike JOOSE.
15. Të tregohet se si mund të realizohet qarku logjik që realizon operacionin  me shfrytëzim e:
	1. vetëm qarqeve logjike JODHE;
	2. vetëm qarqeve logjike JOOSE.
16. Për qarkun digjital në figurë të tregohet se cilin funksion e prezanton.



1. Për qarkun digjital në figurë të tregohet se cilin funksion e realizon për P=0, përkatësisht P=1.

